DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT 1987

MATHEMATIQUES

DUREE : 4 Heures.

2ème épreuve commune aux options M et P

Nota : Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 centimètres.

Les candidats devront remettre deux copies séparées, l'une traitant du problème de géométrie analytique, l'autre, traitant de l'exercice d'algèbre. S'ils n'ont traité qu'une seule de ces parties, ils devront remettre une copie blanche. Ils indiqueront impérativement la marque et le type de la calculatrice utilisée sur la copie d'analytique.

La composition comporte un problème d'analytique et un exercice d'algèbre. La présentation et l'orthographe auront leur part dans la notation.

PROBLEME

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble des segments $[A, B]$ de longueur 1 qui, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'axes Ox, Oy, Oz vérifient :

(1) : B est sur l'axe Oz. Sa cote est positive, strictement dans la I° partie, et au sens large dans la 2° partie.

(2) : A est dans le plan z = 0. Son abscisse et son ordonnée sont positives ou nulles.

Les trois parties du problème sont indépendantes. Dans les deux premières, on étudie deux sous-familles particulières de segments $[A, B]$, et dans la troisième une surface réglée, définie par une représentation paramètrique. Cette surface est liée, pour des raisons d'ordre cinématique dont les candidats n'auront pas à se préoccuper, à une sous-famille particulière de segments $[A, B]$.

Sous réserve de respecter les notations et numérotations de l'énoncé, les candidats pourront aborder ces trois parties dans l'ordre de leur choix.

- I -

On considère la sous-famille des segments $[A, B]$ tels que A est dans le plan $x = 0$.

I - 1 - Déterminer et construire l'enveloppe de la famille des droites A B

I - 2 - Déterminer et construire l'enveloppe de la famille des droites A X, menées par A perpendiculairement à la droite A B, dans le plan $x = 0$.

- II -

On rappelle que dans cette partie, la côte de B peut être nulle.

On donne deux constantes réelles, strictement positives, a et b, vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, et on étudie la sous-famille des segments $[A,B]$ tels que A reste sur la droite d'équations $y = a$; $z = 0$.

II - 1 - Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre l'abscisse x_A de A, l'ensemble des valeurs que peut prendre la côte z_B de B, ainsi qu'une relation liant x_A et z_B.

II - 2 - Trouver alors une représentation paramètrique de la surface (S) engendrée par la famille des segments A, B envisagés dans cette partie.

II - 3 - Etudier l'intersection de cette surface (S) par des plans parallèles à xOz.

II - 4 - En déduire le volume de la portion d'espace limitée par (S) et les trois plans $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

- III -

On donne les droites D'(w), définies par le système d'équations cartésiennes :

$$D'(w)\ \begin{cases} x = -2\sin w + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 2w \\ y = 2\cos w - \frac{1}{4}\sin 2w. \end{cases}$$

où w est un paramètre qui décrit l'intervalle $[0 , 2\pi]$.

Cet ensemble de droites détermine alors la surface réglée (Ω).

III - 1 - Montrer que D'(w) fait avec l'axe Oz un angle constant. Déterminer et construire l'intersection de (Ω) et du plan $z = 0$, puis celle de (Ω) et du plan $y = 0$.

Tournez la page S.V.P.

III - 2 - Déterminer par une représentation paramétrique, les courbes (C) famille des courbes orthogonales à la famille des droites D'(w), c'est-à-dire tracées sur (Ω), et coupant en chacun de leurs points, orthogonalement, une droite D'(w).

III - 3 - Parmi ces courbes (C), trois rencontrent la droite Ox. On appelle C_0 celle qui passe par le point de coordonnées $(x = \frac{1}{2}, y = 0, z = 0)$ et par C_1 l'une quelconque des deux autres.
Construire les projections sur les trois plans de coordonnées de C_0 et de C_1.

III - 4 - On trace sur (Ω) la courbe définie par : $z = \frac{1}{2} \sin w + h$, h réel quelconque. Montrer que cette courbe est plane, préciser son plan, et donner sa nature.

E X E R C I C E

A/ Dans tout l'énoncé, E désigne un espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. On note Q, A, B, C quatre applications, Q de E dans $\mathbb{C}$, A,B,C de E x E dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout (a, b) dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $(\vec{x}, \vec{y})$ dans E x E, on a :

(1) $\quad Q(a\vec{x} + b\vec{y}) = a^2A(\vec{x},\vec{y}) + 2abB(\vec{x},\vec{y}) + b^2C(\vec{x},\vec{y})$

- 1 - Exprimer A et C à l'aide de Q. Montrer que, pour tout a dans $\mathbb{C}$ et $\vec{x}$ dans E, on a :

(2) $\quad Q(a\vec{x}) = a^2Q(\vec{x})$.

- 2 - Exprimer $B(\vec{x},\vec{y})$ à l'aide de $Q,\vec{x}$ et $\vec{y}$. Montrer que quels que soient a dans $\mathbb{C}$ et $(\vec{x},\vec{y})$ dans E x E on a :

(3) $\quad B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{y},\vec{x})$, et $B(a\vec{x},\vec{y}) = aB(\vec{x},\vec{y})$

- 3 - On pose $D(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = B(\vec{x} + \vec{y},\vec{z}) - B(\vec{x},\vec{z}) - B(\vec{y},\vec{z})$.
Déduire de ce qui précède que, pour tout a dans $\mathbb{C}$ et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dans E x E x E, on a :

(4) $\quad D(a\vec{x}, a\vec{y}, a\vec{z}) = a^2D(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

En calculant $Q(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$ de deux façons, montrer que $D(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = D(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$.

- 4 - Montrer que $D(a\vec{x},a\vec{y},a\vec{z}) = a^3D(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ quels que soient a dans $\mathbb{C}$ et $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ dans E x E x E.

Montrer alors que B est une forme bilinéaire symétrique et que Q est une forme quadratique.

B/ On considère une forme quadratique sur E, non dégénérée, Q, de forme polaire B.

- 1 - Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}_0$ tel que $Q(\vec{x}_0) \neq 0$.

- 2 - Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{y}$ de E tels que $B(\vec{y}, \vec{x}_0) = 0$ est un sous-espace vectoriel V_0 de E. Nous nous proposons maintenant de prouver que c'est un sous-espace supplémentaire de $\text{vect}(\vec{x}_0)$, c'est-à-dire de la droite engendrée par $\vec{x}_0$.

- 3 - Montrer que quel que soit $\vec{z}$ dans E, il existe a dans $\mathbb{C}$ et $\vec{y}$ dans V_0 tels que : $\vec{z} = a\vec{x}_0 + \vec{y}$.
En déduire que $\text{vect}(\vec{x}_0)$ et V_0 sont bien deux sous-espaces supplémentaires.

- 4 - Soit g un endomorphisme de E.
On pose $R = Q \circ g$. Montrer que R est une forme quadratique sur E et déterminer son noyau.

Soit $J = \left\{ g \in \mathcal{L}(E) \ / \ Qog = Q \right\} = \left\{ g \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall \vec{x} \in E, \ Q\left[g(\vec{x})\right] = Q(\vec{x}) \right\}$

Montrer que J est un sous-groupe de GL (E), c'est-à-dire de l'ensemble des automorphismes de E.

- 5 - $\vec{x}_0$ étant fixé tel que $Q(\vec{x}_0) \neq 0$
on pose :

$\forall \vec{y} \in E, \ s(\vec{y}) = \vec{y} - 2 \dfrac{B(\vec{x}_0,\vec{y})}{Q(\vec{x}_0)} \vec{x}_0$, définissant ainsi une application s de E vers E.

Montrer que s appartient à J. Calculer $s(\vec{x}_0)$, et reconnaître l'endomorphisme s.